Chapitre 2

CALCULS NUMÉRIQUES

I/ PUISSANCE D'UN NOMBRE ENTIER RELATIF

1°/ Définitions

Définition : Pour tout nombre relatif a et tout entier positif n (n>0) :
a^n est le produit de n facteurs égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

et on lit : « a exposant n »
si n = 2 — a^2 se lit : « a au **carré** »
si n = 3 — a^3 se lit : « a au **cube** »

Exemples : $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$(-3)^4 = \mathbf{81}$

$10^5 = 100\,000$

Définition : Pour tout nombre relatif a ($a \neq 0$) et tout entier positif n (n>0) :

L'inverse du nombre a^n est a^{-n} : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

Exemples : $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$ donc $2^{-4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$ $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$ donc $(-2)^{-3} = -\mathbf{\frac{1}{8}}$

$10^{-5} = \frac{1}{10^5}$ donc $10^{-5} = \frac{1}{100\,000}$ donc $10^{-5} = \mathbf{0{,}000\,01}$

2°/ Écriture scientifique.

Définition : On dit qu'un nombre est écrit en **écriture scientifique** s'il est sous la forme :
$a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif)

Exemples : $12546 = 1{,}2546 \times 10^4$ $7358 = 7{,}358 \times 10^3$ $0{,}00001267 = 1{,}267 \times 10^{-5}$

3°/ Propriétés des puissances

- Pour tout nombre relatif a ($a \neq 0$) et pour tous les nombres entiers m et n :
  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- Pour tous les nombres relatifs a et b ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) et tout entier m :
  $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ et $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- Pour tout nombre relatif a ($a \neq 0$) et pour tous les nombres entiers m et n :

  $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Exemples :

- $4^3 \times 4^8 = 4^{3+8}$ donc $4^3 \times 4^8 = 4^{11}$
- $\dfrac{5^7}{5^3} = 5^{(7-3)}$ donc $\dfrac{5^7}{5^3} = 5^4$ $\dfrac{2^3}{2^6} = 2^{3-6}$ donc $\dfrac{2^3}{2^6} = 2^{-3}$ donc $\dfrac{2^3}{2^6} = \dfrac{1}{2^3}$
- $5^3 \times 2^3 = (5\times2)^3$ donc $5^3 \times 2^3 = 10^3$
- $(4^2)^3 = 4^{2\times3}$ donc $(4^2)^3 = 4^6$

II/ ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

1°/ Addition

Règle : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les deux numérateurs
- on garde le dénominateur commun.

autrement dit : $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

Exemple : $\dfrac{3}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{9}$

Cas où les dénominateurs ne sont pas les mêmes

Règle : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture en écriture fractionnaire qui n'ont pas le même dénominateur, on commence par les mettre au **même dénominateur**.

Démonstration : Soient a, b et c trois nombres ($b \neq 0$). Démontrons que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$

donc $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}\right) \times \mathbf{b} = \dfrac{a}{b} \times \mathbf{b} + \dfrac{c}{b} \times \mathbf{b}$ $\dfrac{a}{b} \times b = a$ (définition)

donc $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}\right) \times \mathbf{b} = a + c$

donc $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}\right)$ est le nombre qui, multiplié par b, donne (a + c)

Par définition $\dfrac{a+c}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne (a + c)

Donc $\boldsymbol{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}}$

Exemple :

$\frac{-3}{7} + \frac{4}{5}$ $7 \neq 5$ donc on ne peut pas additionner sans mettre auparavant les fractions au même dénominateur.

On va chercher un nombre qui soit dans la table de multiplication de 5 et dans celle de 7.

5	10	15	20	25	30	**35**	40	$35 = 7 \times 5$
7	14	21	28	**35**	42	49	56	$35 = 5 \times 7$

$$\frac{-3}{7} + \frac{4}{5} = \frac{-3 \times 5}{7 \times 5} + \frac{4 \times 7}{5 \times 7}$$

$$\frac{-3}{7} + \frac{4}{5} = \frac{-15}{35} + \frac{28}{35}$$

$$\frac{-3}{7} + \frac{4}{5} = \frac{13}{35}$$

2°/ Multiplication

Règle : Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire :

- on multiplie les numérateurs entre eux
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

autrement dit : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ $(b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$

Exemples :

$$\frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{2 \times 7}{5 \times 3}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{15}}$$

$$5 \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 7}{3}$$

$$5 \times \frac{7}{3} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{3}}$$

Car 5 peut s'écrire $\frac{5}{1}$

$$3{,}6 \times \frac{7}{0{,}6} = \frac{36}{10} \times \frac{70}{6}$$

$$3{,}6 \times \frac{7}{0{,}6} = \frac{6 \times 6 \times 7 \times 10}{10 \times 6 \times 1}$$

$$3{,}6 \times \frac{7}{0{,}6} = \mathbf{42}$$

3°/ Division

Définition : Soit a un nombre non nul. Le nombre qui, multiplié par **a** donne **1** est appelé **l'inverse** de a. On le note $\frac{1}{a}$.

Exemples : $3 \times \frac{1}{3} = 1$ donc $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3.

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$ donc l'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$

Propriété : Diviser un nombre par $\frac{c}{d}$ ($c \neq 0$ et $d \neq 0$) revient à le multiplier par $\frac{d}{c}$

Exemples :

$$\frac{5}{9} : \frac{4}{3} = \frac{5}{9} \times \frac{3}{4} \qquad \text{de même} \qquad \frac{5}{3} = 5 \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{9} : \frac{4}{3} = \frac{5 \times 3}{9 \times 4}$$

$$\frac{5}{9} : \frac{4}{3} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3 \times 4} \qquad \text{donc} \qquad \frac{5}{9} : \frac{4}{3} = \frac{5}{12}$$

III/ Racine carrée d'un nombre positif

Définition : Soit « a » est un nombre positif.
On appelle **racine carrée** de « a » le nombre positif « x » tel que : $x^2 = a$.

Notation : La racine carrée du nombre positif « a » se note « $\sqrt{a}$ »,
et se lit « racine carrée de a » ou « racine de a ».

Vocabulaire : Le symbole « $\sqrt{.}$ » est appelé **radical**.
Le nombre sous le radical s'appelle le **radicande**.

Propriétés : Si $\sqrt{a}$ existe, alors cette écriture signifie : $a \geq 0$; $\sqrt{a} \geq 0$ $(\sqrt{a})^2 = a$.
Si $a \geq 0$, alors $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Pour calculer une racine carrée, on peut la déterminer mentalement si on connaît les carrés parfaits, utiliser la calculatrice ou utiliser les opérations sur les racines carrées.

Remarque : Dans un calcul avec des radicaux, on peut donner la réponse :

- sous la forme de valeur exacte c'est-à-dire qu'on simplifie l'écriture et on conserve le radical si nécessaire.
- sous la forme de valeur approchée arrondie en utilisant la calculatrice.

Attention : **$\sqrt{a}$ n'est pas toujours un nombre entier, décimal ou rationnel. Dans ce cas on dit que $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel. (exemples : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$)**