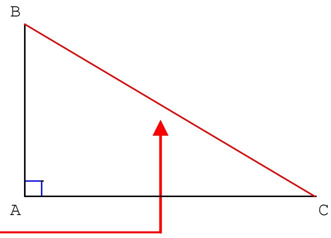
Chapitre 2

THEOREME DE PYTHAGORE

I/ Théorème de Pythagore

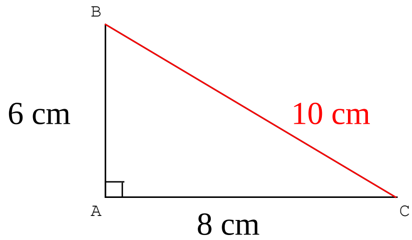
Définition : Le côté opposé à l'angle droit dans un triangle rectangle est appelé l'hypoténuse.

Théorème : Si un triangle est rectangle
alors, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



Autrement dit : Si ABC est un triangle rectangle en A
Alors, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

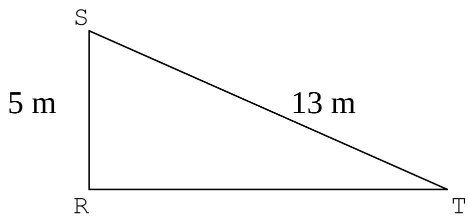
Exemples :
1/ ABC est un triangle rectangle en A.
Donc on a l'égalité de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2$
$BC^2 = 36 + 64$
$BC^2 = 100$



On utilise la touche $\sqrt{\ }$ (se lit : « racine carrée ») de la calculatrice pour trouver la valeur de BC.

BC = 10 donc [BC] a pour longueur 10 cm.

2/ RST est un triangle rectangle en R.
Donc on a l'égalité de Pythagore : $ST^2 = RS^2 + RT^2$
$13^2 = 5^2 + RT^2$
$169 = 25 + RT^2$
$RT^2 = 169 - 25$
$RT^2 = 144$
RT = 12 donc [RT] mesure 12 cm.



Propriété (admise): (Contraposée du théorème de Pythagore)
Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors, ce triangle n'est pas rectangle.

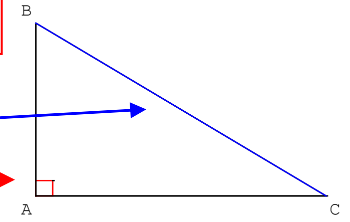
Exemple : Soit ABC un triangle avec AB = 5 cm AC = 3 cm BC = 6 cm
[BC] est le plus grand côté du triangle ABC
$BC^2 = 6^2$ $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 3^2$
$BC^2 = 36$ $AB^2 + AC^2 = 25 + 9$
$AB^2 + AC^2 = 34$
Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$
Donc on n'a pas l'égalité de Pythagore, donc ABC n'est pas un triangle rectangle.
OU
Donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas un triangle rectangle.

II/ Réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du théorème de Pythagore (admise) :

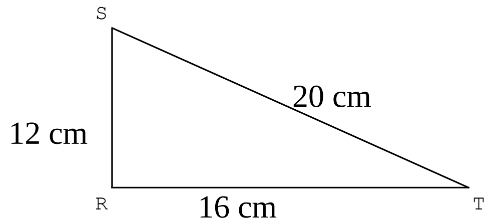
Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors, ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.

Autrement dit :
Si dans un triangle ABC $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Alors, le triangle ABC est rectangle en A.



Exemple : [ST] est le plus grand côté du triangle RST.

$ST^2 = 20^2$ $RS^2 + RT^2 = 12^2 + 16^2$
$ST^2 = 400$ $RS^2 + RT^2 = 144 + 256$
$RS^2 + RT^2 = 400$



Donc $ST^2 = RS^2 + RT^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore RST est un triangle rectangle en R.
OU
Donc on a l'égalité de Pythagore, donc le triangle RST est rectangle en R.

III/ Racine carrée d'un nombre positif

Définition : Soit « a » est un nombre positif.
On appelle **racine carrée** de « a » le nombre positif « x » tel que : $x^2 = a$.

Exemple : $4^2 = 16$ donc $\mathbf{\sqrt{16} = 4}$

Notation : La racine carrée du nombre positif « a » se note « $\sqrt{a}$ »,
et se lit « racine carrée de a » ou « racine de a ».

Vocabulaire : Le symbole « $\sqrt{.}$ » est appelé **radical**.
Le nombre sous le radical s'appelle le **radicande**.

Propriétés : Si $\sqrt{a}$ existe, alors cette écriture signifie : $a \geq 0$; $\sqrt{a} \geq 0$ $(\sqrt{a})^2 = a$.
Si $a \geq 0$, alors $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Pour calculer une racine carrée, on peut la déterminer mentalement si on connaît les carrés parfaits, utiliser la calculatrice ou utiliser les opérations sur les racines carrées.

Remarque : Dans un calcul avec des radicaux, on peut donner la réponse :
- sous la forme de valeur exacte c'est-à-dire qu'on simplifie l'écriture et on conserve le radical si nécessaire.
- sous la forme de valeur approchée arrondie en utilisant la calculatrice.

Attention : **$\sqrt{a}$ n'est pas toujours un nombre entier, décimal ou rationnel. Dans ce cas on dit que $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel.** **(exemples : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$)**